Computersysteme

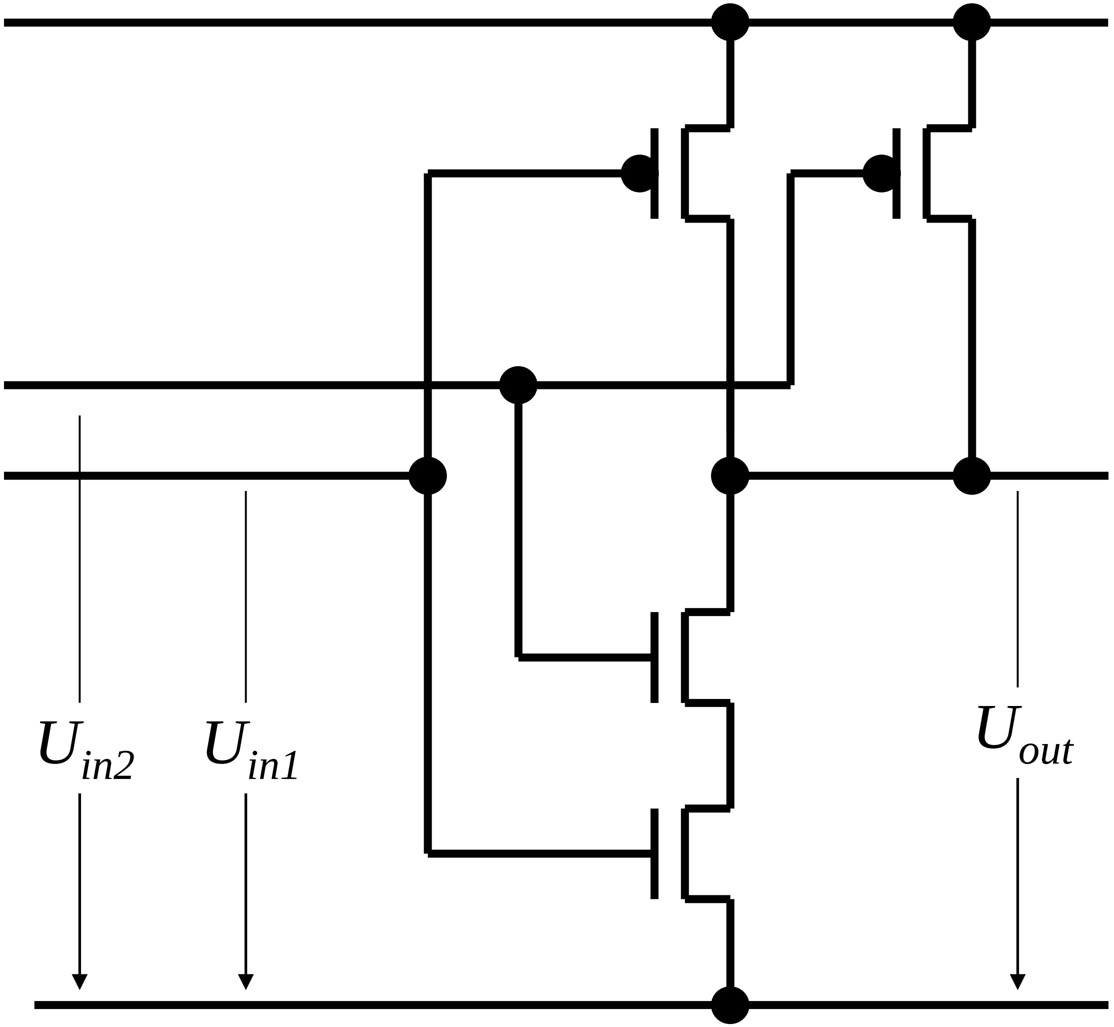
2. Grundlagen Digitaler Schaltungen

- 2.8 Schaltnetze aus Gattern und Leitungen
- 2.9 Boole‘sche Algebra
- 2.10 Minimierung Boole‘scher Funktionen
- 2.11 CMOS Komplexgatter

Die nächste Funktion, die wir in einem Gatter mit MOS-Transistoren realisieren wollen, ist ein Nand-Gatter. Der Ausgang eines Nand-Gatters ist 1, wenn nicht beide Eingänge auf 1 sind. Wir müssen also erreichen, dass auf den Ausgang das GND-Potenzial gelegt wird, wenn beide Eingänge 1 ist (*). Ferner müssen wir das Versorgungspotenzial V_{dd} an den Ausgang bringen, falls mindestens einer der Eingänge 0 ist (**).

Wie gelingt dies? Wir schalten zwei n-Transistoren in Serie und verbinden die Source des ersten mit GND. Damit erfüllt die Drain des zweiten die erste Bedingung (*) für den Ausgang. Ferner schalten wir zwei p-Transistoren parallel, deren Sourcen wir an V_{dd} anschließen. Wiederum ist die Drain der Ausgang. Damit ist die zweite Bedingung (**) für den Ausgang erfüllt. Verbinden wir nun die Drain anschlüsse dieser beiden Pfade, so ist das Nand-Gatter fertig.

Nand-Gatter



in1	in2	out
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Man beachte, dass die n-Transistoren wieder lediglich gebraucht werden, um das Potenzial der logischen 0 (GND) an den Ausgang zu bringen. Ebenso benutzen wir die p-Transistoren nur zur Weiterleitung des logischen 1-Potentials (V_{dd}). Somit sind die Signale am Ausgang nicht um eine Schwellspannung unterschiedlich zu den beabsichtigten Potenzialen für die entsprechenden logischen Werte. Es ist ein „gute“ 0 und eine „gute“ 1, die am Ausgang zu beobachten ist.

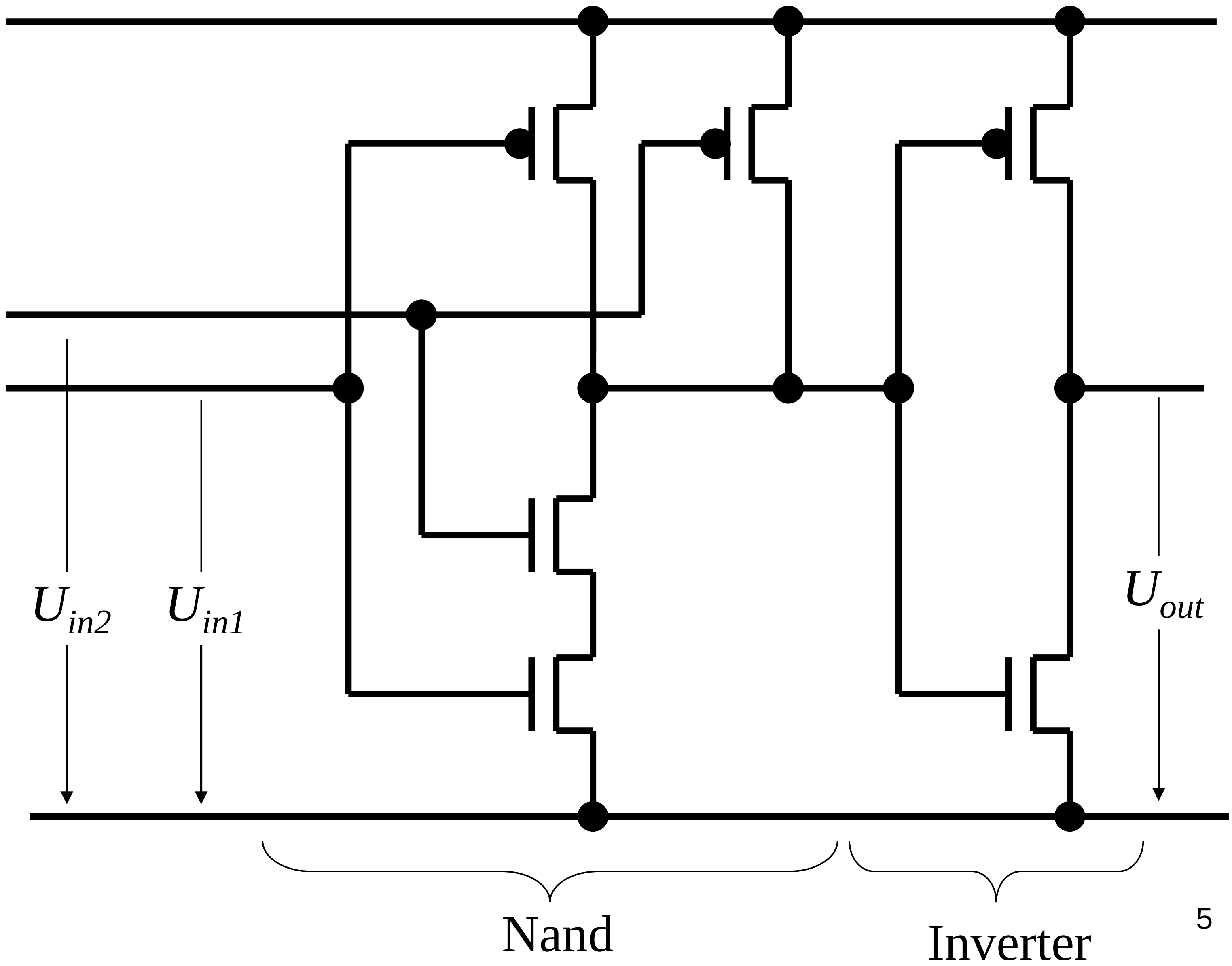
Wie können wir nun ein Und-Gatter aufbauen?

Durch hintereinanderschalten eines Nand-Gatters mit einem Inverter. Diese Schaltung ist auf der nächsten Folie zu sehen.

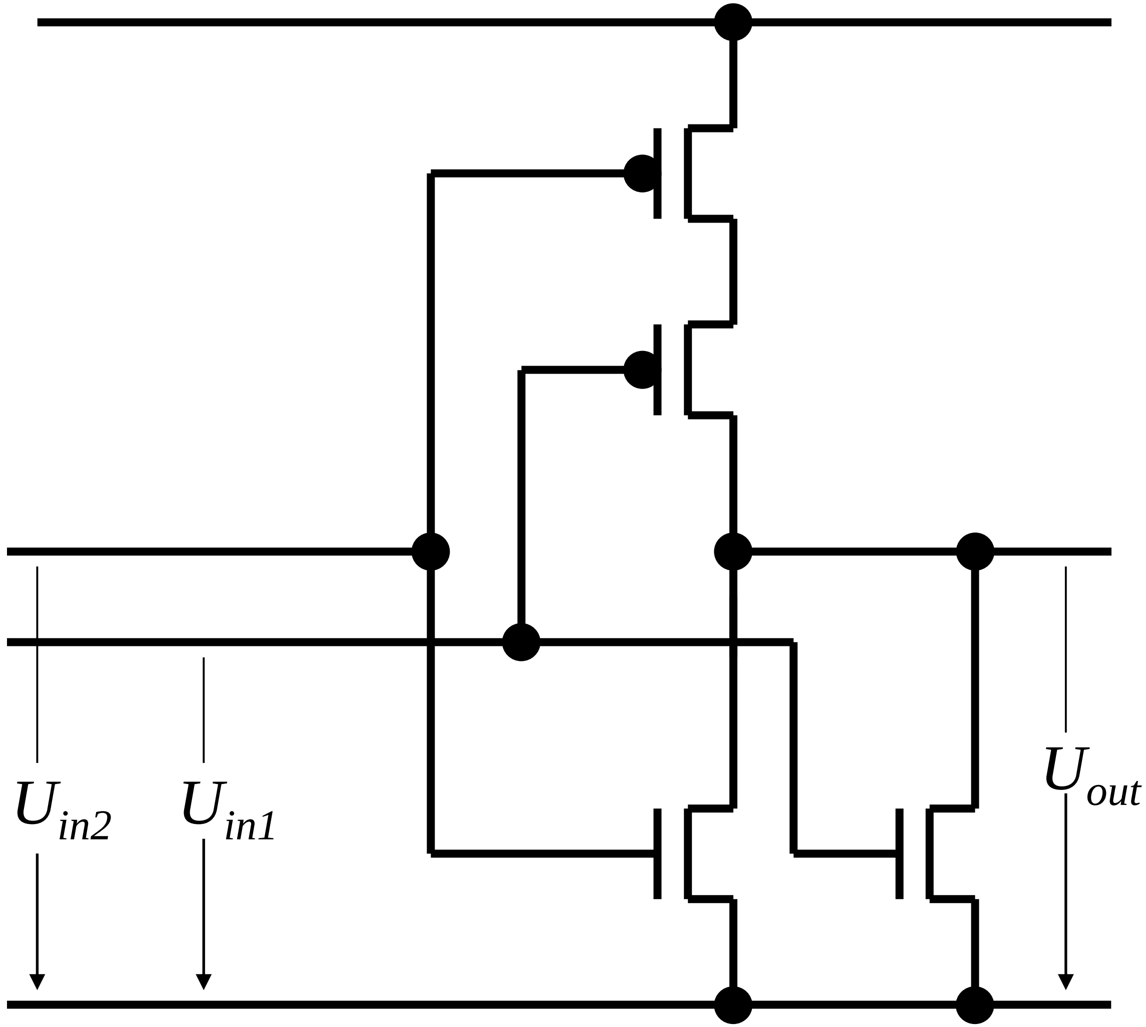
Geht das auch mit weniger Transistoren?

Bitte probieren Sie es aus. Beachten Sie aber dabei, dass am Ausgang „gute“ Signale entstehen sollen. Warum?

Und-Gatter

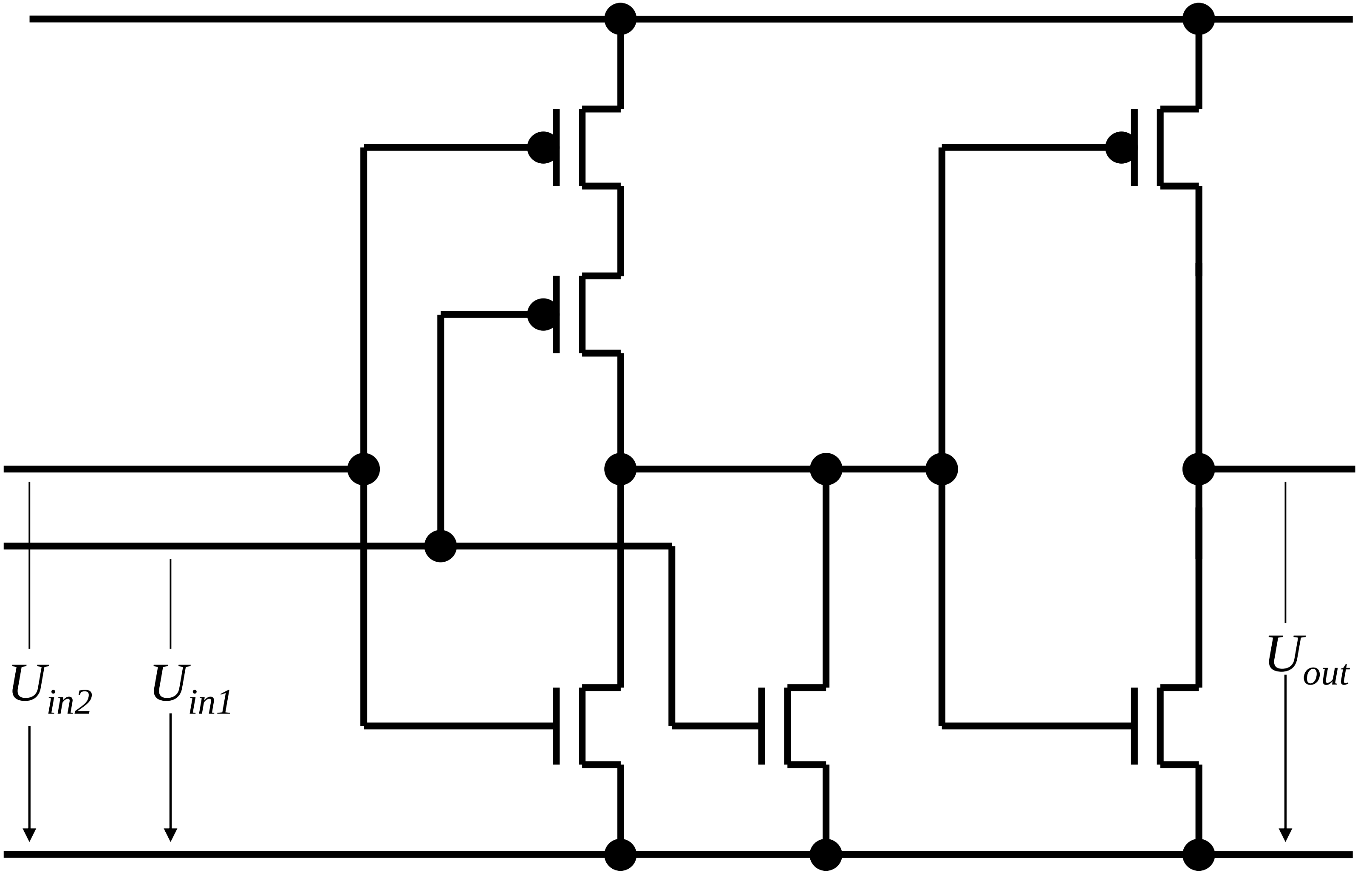


Nor-Gatter



in1	in2	out
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

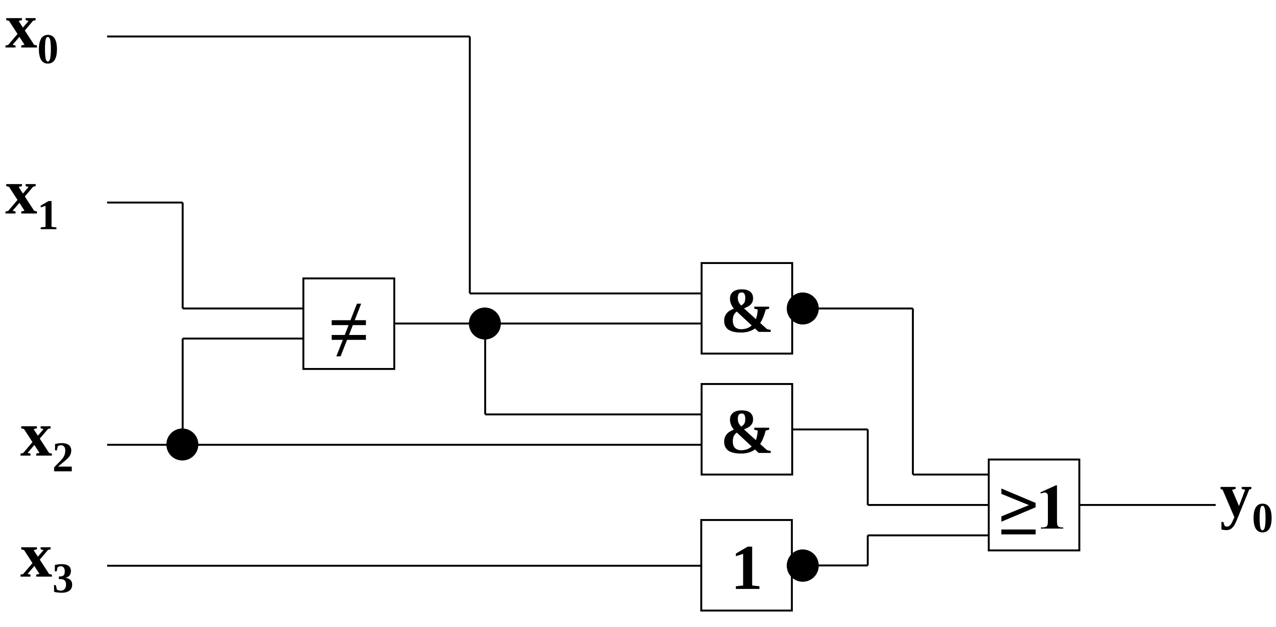
Oder-Gatter



Definition:

Ein Schaltnetz ist eine technische Realisierung einer Boole‘schen Funktion. Schaltnetze können durch Zusammenschalten von Gattern und Leitungen aufgebaut werden.

Beispiel des Schaltnetzes:



Definition:

Ein Produktterm ist eine UND-Verknüpfung von Eingabevariablen, wobei jede Eingabevariable höchstens einmal in invertierter oder in nicht-invertierter Form vorkommen kann.

Beispiele für Produktterme:

$$x_0 \wedge \overline{x_1} \wedge x_2$$

$$\overline{x_0}$$

$$x_0 \cdot x_2$$

$$\overline{x_4}\,\overline{x_2}$$

Definition:

Ein Boole‘sche Funktion ist in Disjunktiver Normalform (DNF), wenn sie aus einer ODER-Verknüpfung von Produkttermen besteht.

Beispiele für Funktionen in DNF:

$$x_0 \wedge \overline{x_1} \wedge x_2 \vee \overline{x_0} \wedge \overline{x_1} \wedge x_2 \vee x_0 \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}$$

$$\overline{x_0}$$

$$x_0 \cdot x_2 + x_0$$

$$\overline{x_4}\,\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_3} x_2 + x_0 x_4$$

Definition:

Ein Minterm (Vollkonjunktion, Minimaler Produktterm) ist ein Produktterm, bei dem alle Eingabevariablen entweder in invertierter oder in nicht-invertierter Form vorkommen. Ein Minterm entspricht einer Zeile in der Wertetabelle der Funktion.

Beispiele für Minterme:

$$x_0 \wedge \overline{x_1} \wedge x_2$$

$$\overline{x_0}$$

$x_0 \cdot x_2$ hingegen ist kein Minterm, wenn es auch noch eine Eingabevariable x_1 gibt.

Definition:

Die Kanonische Disjunktive Normalform (KDNF) einer Boole‘schen Funktion ist eine ODER-Verknüpfung aller Minterme, für die die Funktion den Wert 1 annimmt.

Beispiele für Funktionen in KDNF:

$$x_0 \wedge \overline{x_1} \wedge x_2 \vee \overline{x_0} \wedge \overline{x_1} \wedge x_2 \vee x_0 \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}$$

$$\overline{x_0}$$

Die folgende Funktion ist nicht in KDNF;

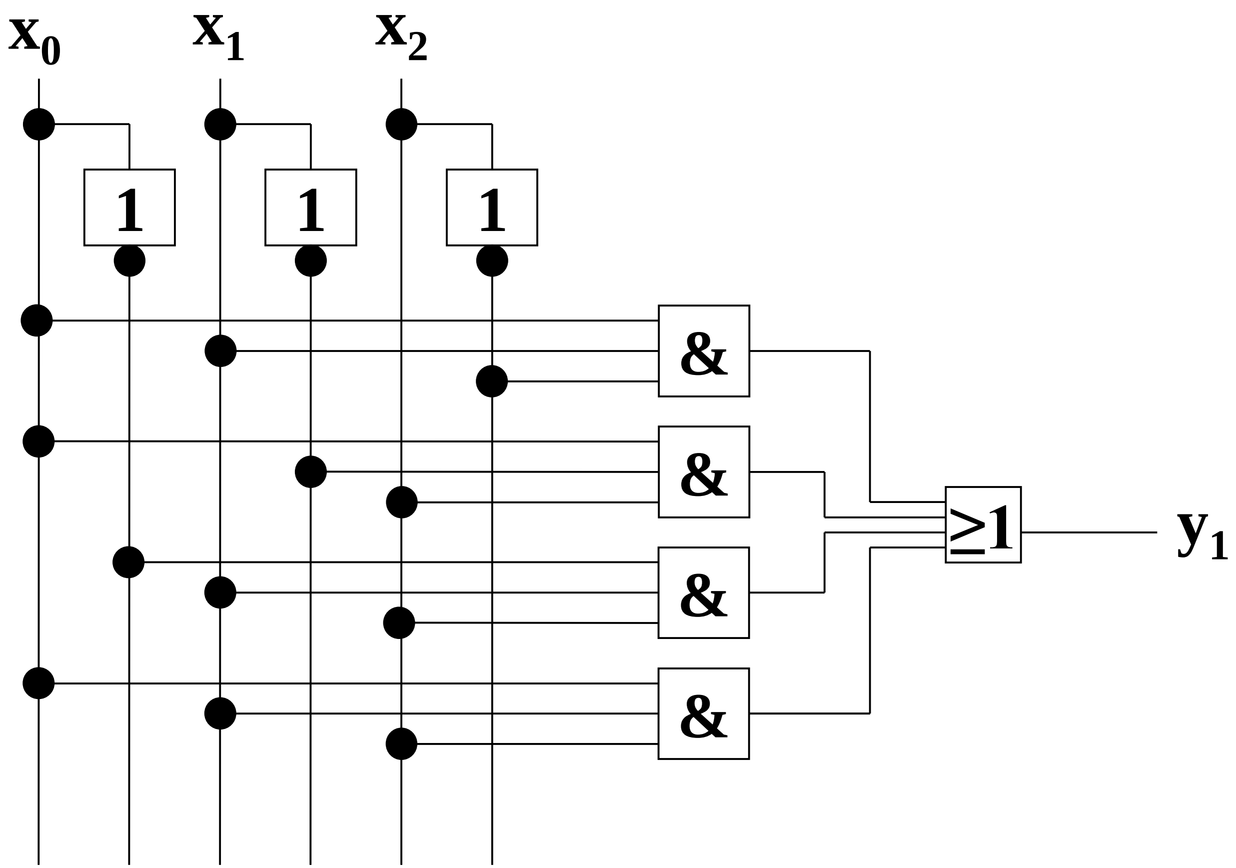
$$x_0 \wedge \overline{x_1} \wedge x_2 \vee \overline{x_0} \wedge x_2 \vee x_0 \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}$$

im zweiten Produktterm taucht das x_1 nicht auf, daher ist es kein Minterm.

Beispiel einer Wertetabelle einer Funktion:

x_2	x_1	x_0	y_1	Minterm
0	0	0	0	$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}$
0	0	1	0	$x_0\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}$
0	1	0	0	$\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}$
0	1	1	1	$x_0\,x_1\,\overline{x_2}$
1	0	0	0	$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,x_2$
1	0	1	1	$x_0\,\overline{x_1}\,x_2$
1	1	0	1	$\overline{x_0}\,x_1\,x_2$
1	1	1	1	$x_0\,x_1\,x_2$

Beispiel des Schaltbildes einer Funktion in KDNF:



Definition:

Ein Summenterm ist eine ODER-Verknüpfung von Eingabevariablen, wobei jede Eingabevariable höchstens einmal in invertierter oder in nicht-invertierter Form vorkommen kann.

Beispiele für Summenterme:

$$x_0 \vee \overline{x_1} \vee x_2$$

$$\overline{x_0}$$

$$x_0 + x_2$$

Definition:

Ein Boole‘sche Funktion ist in Konjunktiver Normalform (KNF), wenn sie aus einer UND-Verknüpfung von Summentermen besteht.

Beispiele für Funktionen in KNF:

$$(x_0 \vee \overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_0} \vee \overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_0 \vee x_1 \vee \overline{x_2})$$

$$\overline{x_0}$$

$$x_0 \cdot (x_2 + x_0)$$

$$(\overline{x_4} + \overline{x_2}) x_1 (\overline{x_3} + x_2)(x_0 + x_4)$$

Definition:

Ein Maxterm (Volldisjunktion) ist ein Summenterm, bei dem alle Eingabevariablen entweder in invertierter oder in nicht-invertierter Form vorkommen. Es gibt für jede Zeile i in einer Wertetabelle der Funktion einen Maxterm, der der Menge aller Zeilen außer seiner Zeile i entspricht.

Beispiele für Maxterme:

$$x_0 \vee \overline{x_1} \vee x_2$$

$$\overline{x_0}$$

$x_0 + x_2$ hingegen ist kein Maxterm, wenn es auch noch eine Eingabevariable x_1 gibt.

Definition:

Die Kanonische Konjunktive Normalform (KKNF) einer Boole‘schen Funktion ist eine UND-Verknüpfung aller Maxterme, für deren Zeile die Funktion den Wert 0 annimmt.

Beispiele für Funktionen in KKNF:

$$(x_0 \vee \overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_0} \vee \overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_0 \vee x_1 \vee \overline{x_2})$$

$$\overline{x_0}$$

Die folgende Funktion ist nicht in KKNF;

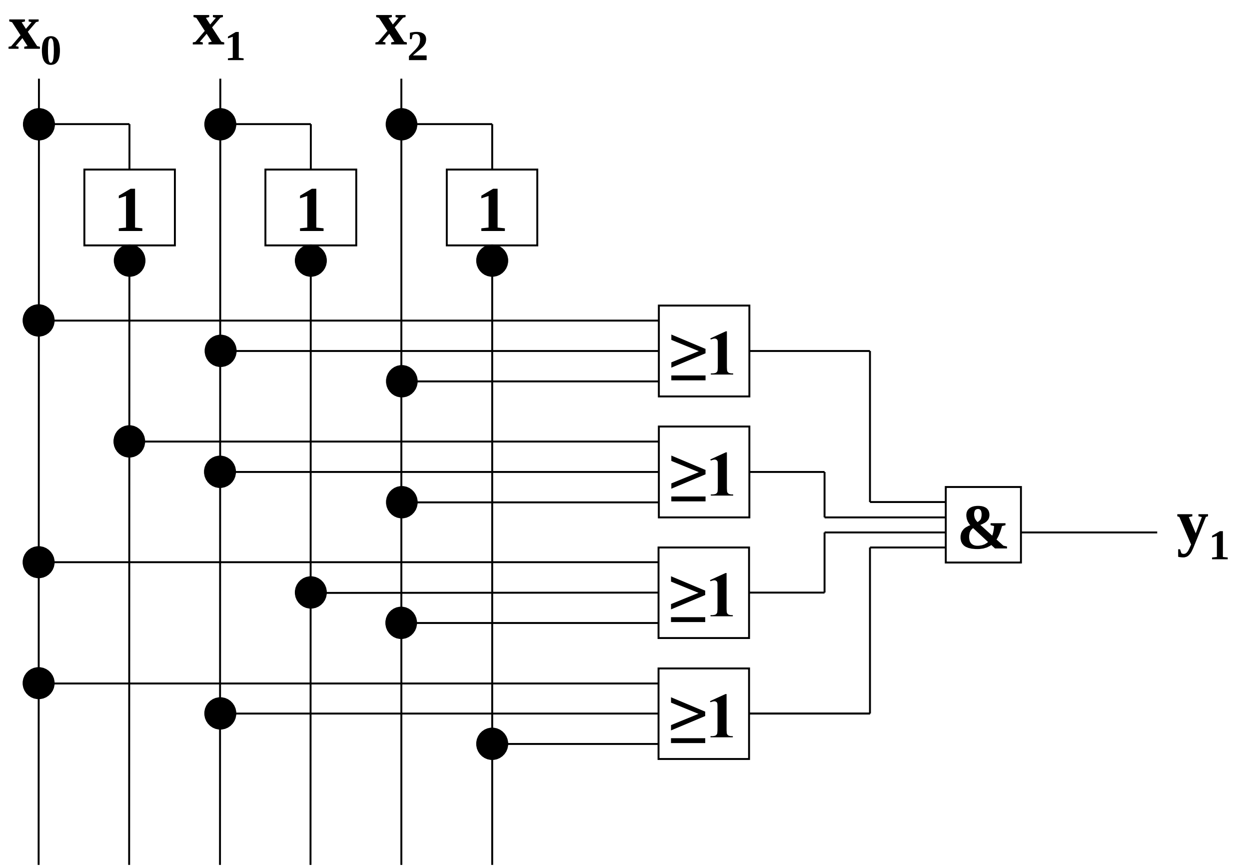
$$x_0 \wedge (\overline{x_0} \vee x_1 \vee \overline{x_2})$$

im ersten Summenterm tauchen x_1 und x_2 nicht auf, daher ist es kein Maxterm.

Beispiel einer Wertetabelle einer Funktion:

x_2	x_1	x_0	y_1	**Maxterm**
0	**0**	**0**	**0**	$x_0 \vee x_1 \vee x_2$
0	**0**	**1**	**0**	$\overline{x_0} \vee x_1 \vee x_2$
0	**1**	**0**	**0**	$x_0 \vee \overline{x_1} \vee x_2$
0	**1**	**1**	**1**	$\overline{x_0} \vee \overline{x_1} \vee x_2$
1	**0**	**0**	**0**	$x_0 \vee x_1 \vee \overline{x_2}$
1	**0**	**1**	**1**	$\overline{x_0} \vee x_1 \vee \overline{x_2}$
1	**1**	**0**	**1**	$x_0 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
1	**1**	**1**	**1**	$\overline{x_0} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$

Beispiel des Schaltbildes einer Funktion in KKNF:



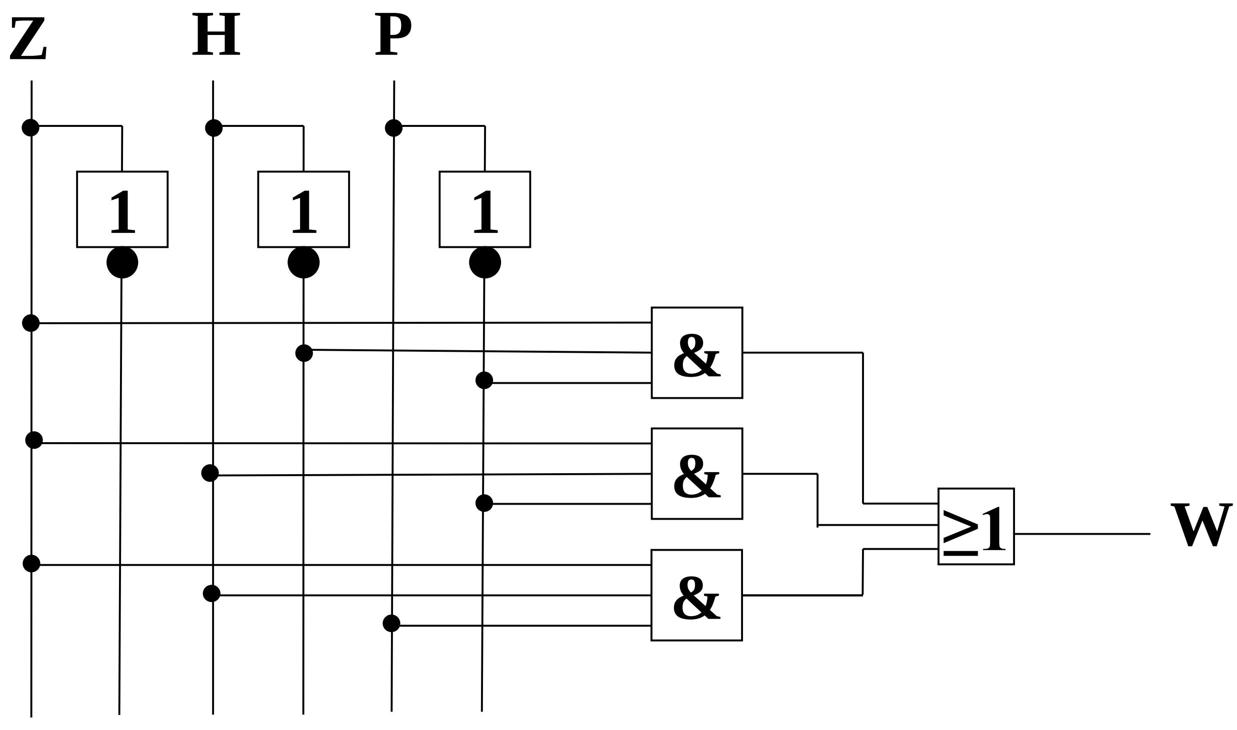
Beispiel einer Funktion im Auto:

Zündung:	Z=1 : Zündung an
Hitze:	H=1 : Temperatur>95^{o}
Pegel:	P=1 : ausreichend Wasser

Z	H	P	W	Minterm
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$Z\overline{H}\,\overline{P}$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$ZH\overline{P}$
1	1	1	1	ZHP

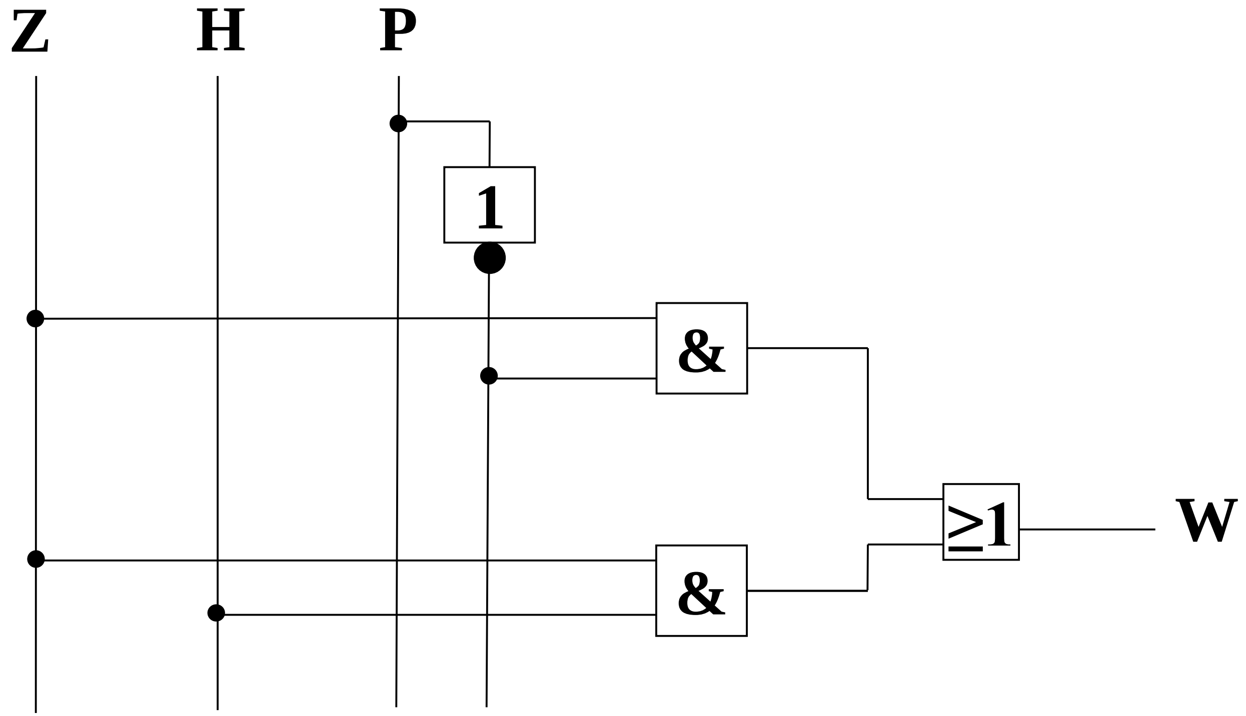
Warnleuchten-Funktion in KDNF:

$$W = Z\overline{H}\,\overline{P} \vee ZH\overline{P} \vee ZHP$$



Warnleuchten-Funktion in DMF:

$$W = Z\overline{P} + ZH$$



Definition:

Eine Boole‘sche Algebra ist eine algebraische Struktur (A,+,•), wobei A eine Menge ist und + und • zweistellige Verknüpfungen auf dieser Menge. Beide Verknüpfungen müssen kommutativ sein. Es gibt neutrale Elemente für + und •. Es gelten beide Distributivgesetze. Für jedes Element gibt es ein inverses Element bezüglich beider Verknüpfungen.

Axiome der Boole'schen Algebra:

1. Kommutativgesetze:

$$\forall x_0, x_1 \in A: x_0 + x_1 = x_1 + x_0$$
$$\forall x_0, x_1 \in A: x_0 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_0$$

2. Neutrale Elemente:

$$\exists 0 \in A: \forall x \in A: 0 + x = x$$
$$\exists 1 \in A: \forall x \in A: 1 \cdot x = x$$

3. Distributivgesetze:

$$\forall x_0, x_1, x_2 \in A: (x_0 + x_1) \cdot x_2 = x_0 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$$
$$\forall x_0, x_1, x_2 \in A: (x_0 \cdot x_1) + x_2 = (x_0 + x_2) \cdot (x_1 + x_2)$$

4. Inverses Element:

$$\forall x \in A \exists \overline{x} \in A: x + \overline{x} = 1 \, und \; x\overline{x} = 0$$

Lemma:

1. $\forall x \in A: x + 0 = x$

2. $\forall x \in A: x \cdot 1 = x$

3. $\forall x_0, x_1, x_2 \in A: x_2 \cdot (x_0 + x_1) = x_2 \cdot x_0 + x_2 \cdot x_1$

4. $\forall x_0, x_1, x_2 \in A: x_2 + (x_0 \cdot x_1) = (x_2 + x_0) \cdot (x_2 + x_1)$

Das inverse Element ist eindeutig.
Beweis:

Sei x Eingabevariable. Seien x1, x2 inverse Elemente zu x.

$$x_1 = x_1 \cdot 1 + 0 = x_1 \cdot (x_2 + x) + x_2 \cdot x = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x \ + x_2 \cdot x = x_1 \cdot x_2 + 0 + x_2 \cdot x$$
$$= x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x = x_2 \cdot (x_1 + x) = x_2 \cdot 1 = x_2$$

Das inverse Element zu x ist also eindeutig.

Aus diesen vier Axiomen lässt sich eine Reihe von Aussagen ableiten

Sätze der Boole‘schen Algebra:

Satz 1:

$$\forall x \in A: x + 1 = 1$$

Satz 2:

$$\forall x \in A: x \cdot 0 = 0$$

Satz 3:

$$\forall x \in A: x + x = x$$

Satz 4:

$$\forall x \in A: x \cdot x = x$$

Sätze der Boole‘schen Algebra:

Satz 1:

$$\forall x \in A : x + 1 = 1$$

Beweis:

$$x + 1 = 1 \cdot (x + 1) = (x + \overline{x}) \cdot (x + 1) = (\overline{x} + x) \cdot (1 + x) =$$
$$(\overline{x} \cdot 1) + x = \overline{x} + x = 1$$

Satz 4:

$$\forall x \in A: x \cdot x = x$$

Beweis:

$$x \cdot x = (0 + x) \cdot (0 + x) = (0 \cdot 0) + x = 0 + x = x$$

Satz 5 (Assoziativgesetz für $\cdot$):

$$\forall x_0, x_1, x_2 \in A: (x_0 \cdot x_1) \cdot x_2 = x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)$$

Satz 6 (Assoziativgesetz für +):

$$\forall x_0, x_1, x_2 \in A: (x_0 + x_1) + x_2 = x_0 + (x_1 + x_2)$$

Satz 7:

$$\forall x_0, x_1 \in A: x_0 + x_0 x_1 = x_0$$

Beweis:

$$x_0 + x_0 \cdot x_1 = x_0 \cdot 1 + x_0 \cdot x_1 =$$
$$x_0 \cdot (\overline{x}_1 + x_1) + x_0 \cdot x_1 =$$
$$(x_0 \cdot \overline{x}_1 + x_0 \cdot x_1) + x_0 \cdot x_1 =$$
$$x_0 \cdot \overline{x}_1 + (x_0 \cdot x_1 + x_0 \cdot x_1) =$$
$$x_0 \cdot \overline{x}_1 + x_0 \cdot x_1 = x_0 \cdot (\overline{x}_1 + x_1) =$$
$$x_0 \cdot 1 = x_0$$

Satz 8:

$$\forall x_0, x_1 \in A: x_0 \cdot (x_0 + x_1) = x_0$$

Satz 9:

$$\forall x: \overline{\overline{x}} = x$$

Satz 10:

$$\overline{0} = 1 \quad und \quad \overline{1} = 0$$

Satz 11 (Erste Regel von deMorgan):

$$\forall x_0, x_1 \in A: \overline{x_0} + \overline{x_1} = \overline{x_0 \cdot x_1}$$

Satz 12 (Zweite Regel von deMorgan):

$$\forall x_0, x_1 \in A: \overline{x_0} \cdot \overline{x_1} = \overline{x_0 + x_1}$$

Satz 13 (Erste Vereinfachungsregel):

$$\forall x_0, x_1 \in A : (x_0 + x_1) \cdot (x_0 + \overline{x_1}) = x_0$$

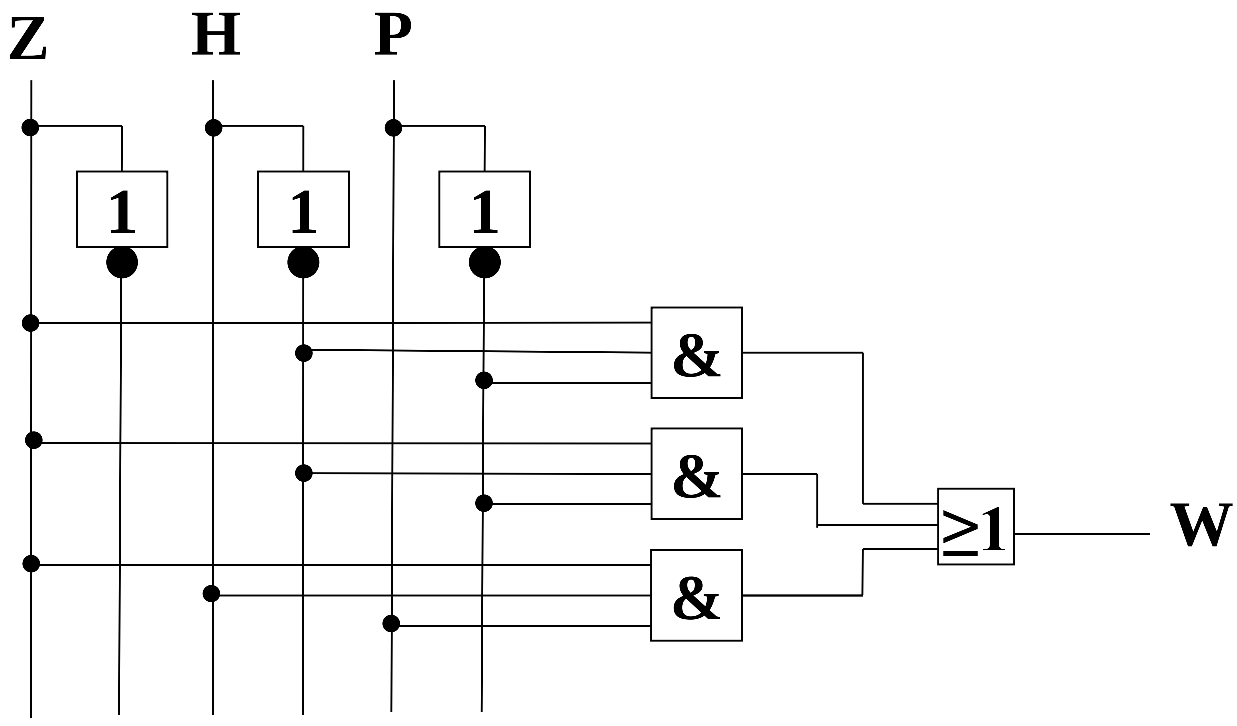
Satz 14 (Zweite Vereinfachungsregel):

$$\forall x_0, x_1 \in A : (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1}) = x_0$$

$$
\begin{aligned}
W &= Z\overline{H}\,\overline{P} + ZH\overline{P} + ZHP \\
&= Z\overline{H}\,\overline{P} + ZH\overline{P} + ZH\overline{P} + ZHP \\
&= Z\overline{P}\,\overline{H} + Z\overline{P}H + ZH\overline{P} + ZHP \\
&= (Z\overline{P}\cdot\overline{H} + Z\overline{P}\cdot H) + (ZH\cdot\overline{P} + ZH\cdot P) \\
&= Z\overline{P}\cdot(\overline{H} + H) + ZH\cdot(\overline{P} + P) \\
&= Z\overline{P}\cdot 1 + ZH\cdot 1 \\
&= Z\overline{P} + ZH
\end{aligned}
$$

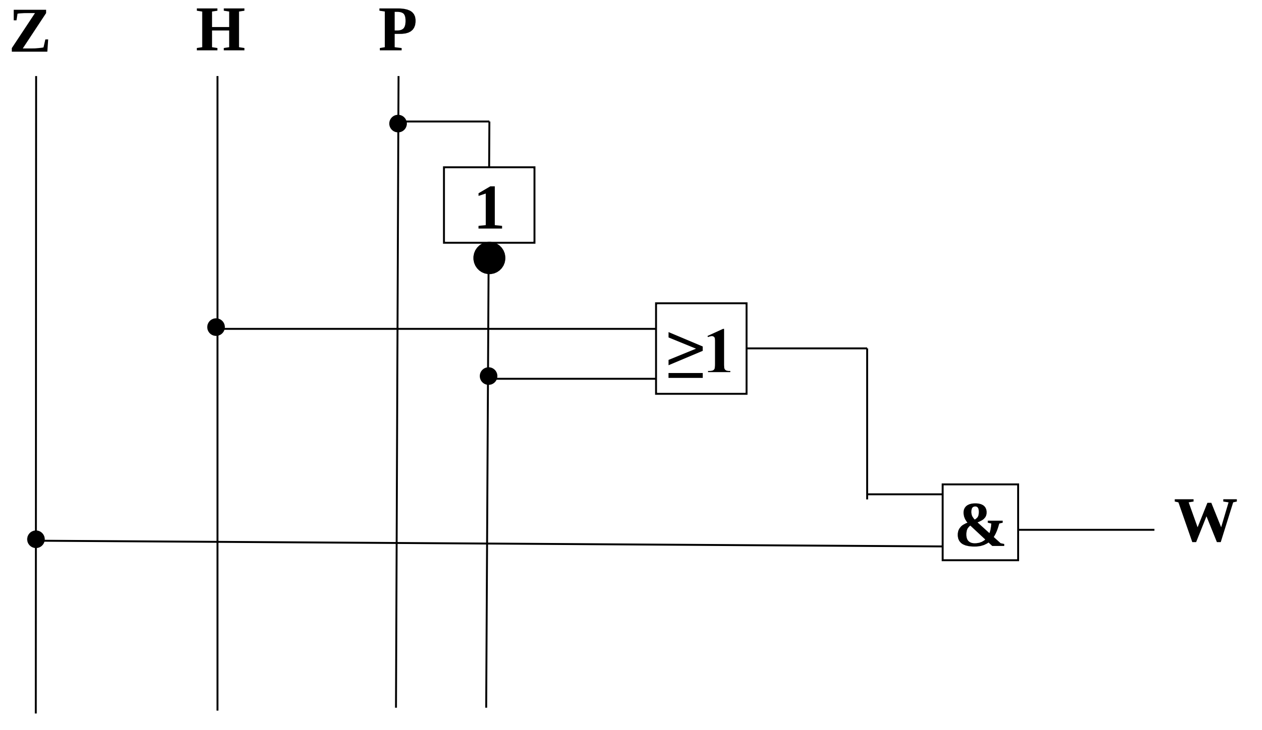
Warnleuchten-Funktion in KDNF:

$$W = Z\overline{H}\,\overline{P} \vee ZH\overline{P} \vee ZHP$$



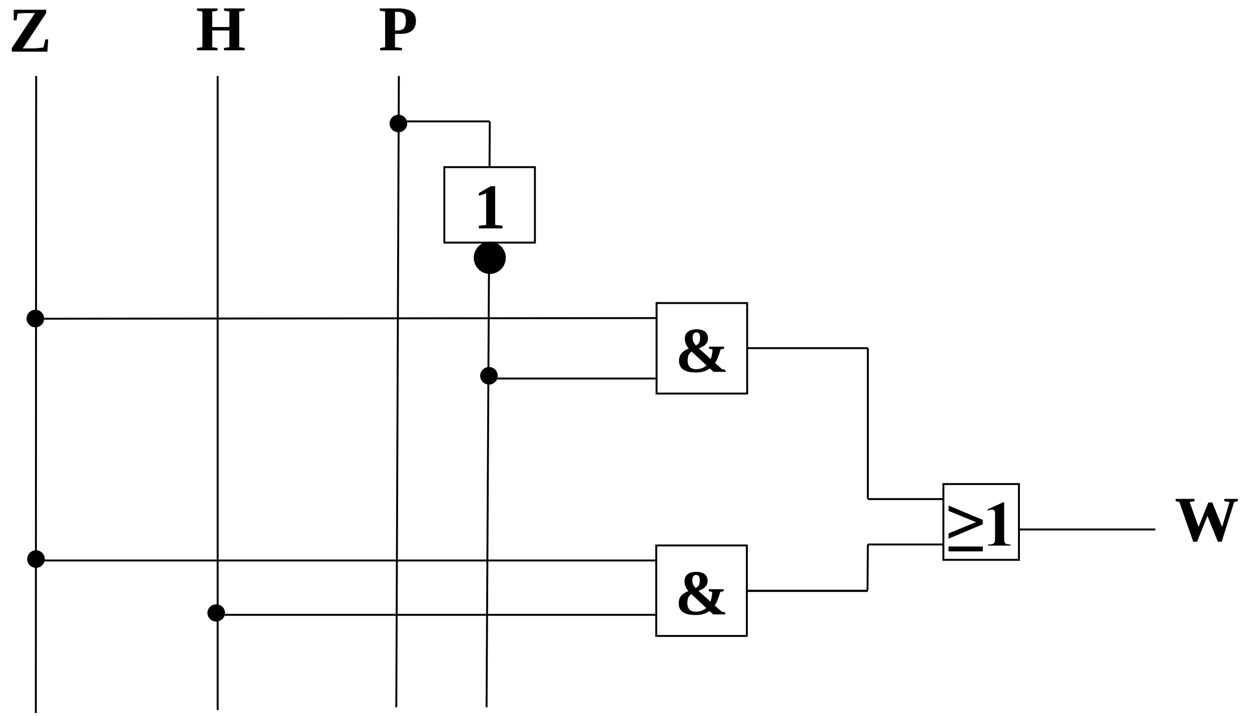
Warnleuchten-Funktion vereinfacht zur KMF:

$$W = Z(\overline{P} \vee H)$$



Warnleuchten-Funktion in DMF:

$$W = Z\overline{P} \vee ZH$$



Definition:

Eine in disjunktiver Normalform angegebene Boole‘sche Funktion ist in Disjunktiver Minimalform (DMF), wenn

- jede äquivalente Darstellung derselben Funktion in DNF mindestens genausoviele Produktterme besitzt,

und wenn

- für jede äquivalente Darstellung in DNF mit genausovielen Produkttermen die Anzahl der Eingänge in diese Produktterme mindestens genauso groß ist wie die Anzahl bei dieser Darstellung.

KV-Diagramm:

- Rechteckiges Schema
- bei n Eingabevariablen 2^n innere Felder
- Ränder so beschriftet, dass jede Variable genau die Hälfte des Diagramms abdeckt
- Jede Variable deckt genau den halben Bereich jeder anderen Variablen ab
- Jeder Minterm ist eindeutig durch ein inneres Feld repräsentiert.

Beispiele:

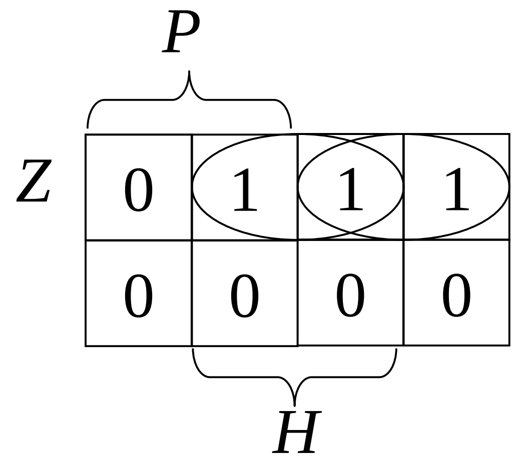
	b	
a	ab	$a\bar{b}$
	$\bar{a}b$	$\bar{a}\bar{b}$

	b			
a	$ab\bar{c}$	abc	$a\bar{b}c$	$a\bar{b}\bar{c}$
	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}bc$	$\bar{a}\bar{b}c$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$
		c		

	b				
a	$ab\bar{c}\bar{d}$	$abc\bar{d}$	$a\bar{b}c\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	
a	$ab\bar{c}d$	$abcd$	$a\bar{b}cd$	$a\bar{b}\bar{c}d$	d
	$\bar{a}b\bar{c}d$	$\bar{a}bcd$	$\bar{a}\bar{b}cd$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	d
	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	
		c			

Beispiel: Warnleuchte:

Z	**H**	**P**	**W**
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**



$$W = Z\overline{P} + ZH$$