Aufgabe 1

Algorithmus von McClusky:
Der Algorithmus von McCluskey liefert durch wiederholte Anwendung der ersten und zweiten Vereinfachungsregel:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \overset{1}{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{2}{\overline{a}\,\overline{b}\,c\,d} + \overset{3}{\overline{a}\,b\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{4}{\overline{a}\,b\,\overline{c}\,d} + \overset{5}{\overline{a}\,b\,c\,\overline{d}} + \overset{6}{\overline{a}\,b\,c\,d} + \overset{7}{a\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{8}{a\,\overline{b}\,c\,d} + \overset{9}{a\,b\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{10}{a\,b\,c\,\overline{d}} \\
&= \overset{1\,\&\,3}{\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{1\,\&\,7}{\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{2\,\&\,6}{\overline{a}\,c\,d} + \overset{2\,\&\,8}{\overline{b}\,c\,d} + \overset{3\,\&\,4}{\overline{a}\,b\,\overline{c}} + \overset{3\,\&\,5}{\overline{a}\,b\,\overline{d}} + \overset{3\,\&\,9}{b\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{4\,\&\,6}{\overline{a}\,b\,d} + \overset{5\,\&\,6}{\overline{a}\,b\,c} + \overset{5\,\&\,10}{b\,c\,\overline{d}} + \overset{7\,\&\,9}{a\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{9\,\&\,10}{a\,b\,\overline{d}} \\
&= [\overset{1}{\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{2}{\overline{a}\,c\,d} + \overset{3}{a\,\overline{c}\,\overline{d}}] + [\overset{4}{\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{5}{\overline{b}\,c\,d} + \overset{6}{b\,\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{7}{b\,c\,\overline{d}}] + [\overset{8}{\overline{a}\,b\,\overline{c}} + \overset{9}{\overline{a}\,b\,c}] + [\overset{10}{\overline{a}\,b\,\overline{d}} + \overset{11}{\overline{a}\,b\,d} + \overset{12}{a\,b\,\overline{d}}] \\
&= [\overset{1\&3}{\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{2}{\overline{a}\,c\,d}] + [\overset{4\&6}{\overline{c}\,\overline{d}} + \overset{5}{\overline{b}\,c\,d} + \overset{6\&7}{b\,\overline{d}}] + \overset{8\&9}{\overline{a}\,b} + [\overset{10\&11}{\overline{a}\,b} + \overset{10\&12}{b\,\overline{d}}] \\
&= \overline{c}\,\overline{d} + \overline{a}\,b + b\,\overline{d} + \overline{a}\,c\,d + \overline{b}\,c\,d
\end{aligned}
$$

Verfahren von Quine:
Es wird eine Tabelle erstellt, die für jeden Minterm in der DNF eine Zeile und für jeden Primterm, der durch das Verfahren von McClusky erzeugt worden ist, eine Spalte hat. In das Feld in der Zeile des Minterms M und der Spalte des Primterms P wird eine 1 eingetragen, wenn aus $M = 1$ folgt $P = 1$, also wenn P M überdeckt. Dann werden die dominanten Zeilen gesucht, also Zeilen, in denen nur eine einzige 1 steht. Diese Einsen in den dominanten Zeilen werden rot markiert und die Spalten, in denen rot markierte Einsen stehen, werden grau markiert. Es entsteht folgende Tabelle:

	$\overline{c}\,\overline{d}$	$\overline{a}\,b$	$b\,\overline{d}$	$\overline{a}\,c\,d$	$\overline{b}\,c\,d$
$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}$	1				
$\overline{a}\,\overline{b}\,c\,d$				1	1
$\overline{a}\,b\,\overline{c}\,\overline{d}$	1	1	1		
$\overline{a}\,b\,\overline{c}\,d$		1			
$\overline{a}\,b\,c\,\overline{d}$		1	1		
$\overline{a}\,b\,c\,d$		1		1	
$a\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}$	1				
$a\,\overline{b}\,c\,d$					1
$a\,b\,\overline{c}\,\overline{d}$	1		1		
$a\,b\,c\,\overline{d}$			1		

Die dominanten Zeilen werden gestrichen, so dass folgende Tabelle entsteht:

	$\overline{c}\,\overline{d}$	$\overline{a}\,b$	$b\,\overline{d}$	$\overline{a}\,c\,d$	$\overline{b}\,c\,d$
$\overline{a}\,\overline{b}\,c\,d$				1	1
$\overline{a}\,b\,\overline{c}\,\overline{d}$	1	1	1		
$\overline{a}\,b\,c\,\overline{d}$		1	1		
$\overline{a}\,b\,c\,d$		1		1	
$a\,b\,\overline{c}\,\overline{d}$	1		1		

Nun werden alle nicht dominanten Zeilen markiert, die eine 1 enthalten, die auf einer markierten Spalte liegt, und diese Zeilen werden ebenfalls gestrichen. Nach dem Streichen der Zeilen, bei denen eine Eins in einer markierten Spalte steht, ist keine Zeile mehr vorhanden. Also stellt die Oder-Verknüpfung der Primterme der markierten Spalten eine DMF der Funktion dar:

$$f_1 = \overline{c}\,\overline{d} + \overline{a}\,b + b\,\overline{d} + \overline{b}\,c\,d$$

Aufgabe 2

Voraussetzung. *Seien $(A, +, \cdot)$ eine Boole'sche Algebra und x_0,$x_1 \in A$.*

Behauptung. *Es gilt $(x_0 + x_1) \cdot (x_0 + \overline{x_1}) = x_0$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}(x_0 + x_1) \cdot (x_0 + \overline{x_1}) &\overset{2mal A1}{=} (x_1 + x_0) \cdot (\overline{x_1} + x_0) \overset{A3}{=} (x_1 \cdot \overline{x_1}) + x_0 \\ &\overset{A1}{=} \underbrace{(\overline{x_1} \cdot x_1)}_{\overset{A4}{=} 0} + x_0 \overset{A2}{=} x_0.\end{aligned}$$

(Die A1 - A4 über den Gleichheitszeichen stehen für die verwendeten Axiome aus der Boole'schen Algebra). □

Aufgabe 3

Die Wahrheitstafel der Boole'schen Funktion

$$f = \overline{x_2}x_1x_0 + \overline{x_2}x_1\overline{x_0} + x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0} + x_2\overline{x_1}x_0 + \overline{x_2}\,\overline{x_1}x_0,$$

die sich in disjunktiver Normalform befindet, ist:

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Damit ergibt sich folgendes KV-Diagramm:

DMF:

f :

		x_0	x_0, x_2	x_2
	0	1	1	1
x_1	1	1	0	0

und es ergibt sich durch Zusammenfassen der maximalen Blöcke mit 1:

$$f = \overline{x_2} \cdot x_1 + x_2 \cdot \overline{x_1} + \overline{x_1} \cdot x_0$$

oder

$$f = \overline{x_2} \cdot x_1 + x_2 \cdot \overline{x_1} + \overline{x_2} \cdot x_0.$$

KMF:

f :

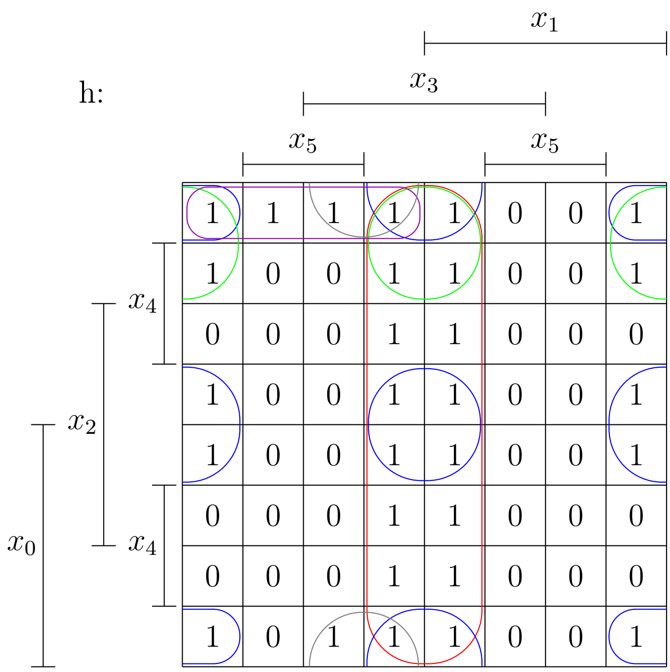
		x_0	x_0, x_2	x_2
	0	1	1	1
x_1	1	1	0	0

und es ergibt sich durch Zusammenfassen der maximalen Blöcke mit 0:

$$f = (\overline{x_2} + \overline{x_1}) \cdot (x_2 + x_1 + x_0).$$

Aufgabe 4

DMF:



Durch Zusammenfassen der maximalen Blöcke mit 1 ergibt sich:

$$h = \overline{x_5}\,x_3 + \overline{x_5}\,\overline{x_4} + \overline{x_5}\,\overline{x_2}\,\overline{x_0} + \overline{x_4}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0} + \overline{x_4}\,x_3\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$$

KMF:

h:

		x_5	x_5, x_3	x_3	x_3, x_1	x_5, x_3, x_1	x_5, x_1	x_1
	1	1	1	1	1	0	0	1
x_4	1	0	0	1	1	0	0	1
x_4, x_2	0	0	0	1	1	0	0	0
x_2	1	0	0	1	1	0	0	1
x_2, x_0	1	0	0	1	1	0	0	1
x_4, x_2, x_0	0	0	0	1	1	0	0	0
x_4, x_0	0	0	0	1	1	0	0	0
x_0	1	0	1	1	1	0	0	1

Durch Zusammenfassen der maximalen Blöcke mit 0 ergibt sich:

$$h = (\overline{x_5} + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_5} + \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_5} + \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_4} + x_3 + \overline{x_0}) \cdot (\overline{x_4} + x_3 + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_5} + x_3 + \overline{x_0})$$