Aufgabe 1

(a) Bestimmung der Wertetabelle von

$$f = (\overline{x_2}x_0 + x_2x_1 + \overline{x_2}\,\overline{x_0}) \cdot (x_0 + x_1) \cdot (\overline{x_2}x_1 + x_2\overline{x_1}),$$

um die Minterme zu bestimmen:

x_2	x_1	x_0	$(\overline{x_2}x_0 + x_2x_1 + \overline{x_2}\,\overline{x_0})$	$(x_0 + x_1)$	$(\overline{x_2}x_1 + x_2\overline{x_1})$	f	Mintermfunktionen
0	0	0	1	0	0	0	
0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	1	$M_0 = \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}$
0	1	1	1	1	1	1	$M_1 = \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot x_0$
1	0	0	0	0	1	0	
1	0	1	0	1	1	0	
1	1	0	1	1	0	0	
1	1	1	1	1	0	0	

Die kanonische disjunktive Normalform (KDNF) ergibt sich aus der Disjunktion aller Minterme, für die f_1 den Wert logisch 1 annimmt. Somit gilt

$$f = M_0 + M_1 = \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot x_0.$$

(b) Der Schaltplan von f ist in Abbildung 1 angegeben.

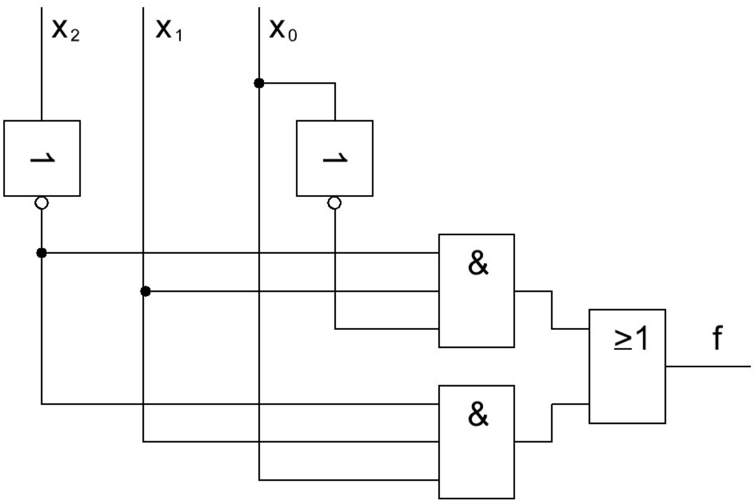

Abbildung 1: Schaltplan von f

Aufgabe 2

20 Punkte

Behauptung. *Für alle $n \in \mathbb{N}_{>2}$ gilt:* $\quad n^2 > 2n + 1$

Beweis. Beweis durch vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang:
Sei $n = 3$.
Dann gilt: $\quad n^2 = 9 > 7 = 2n + 1$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes $n \in \mathbb{N}_{>2}$ gelte: $\quad n^2 > 2n + 1$

Induktionsschluss:
Wir müssen zeigen: $\quad (n+1)^2 > 2(n+1) + 1$.
Mit der Induktionsvoraussetzung (IV) folgt:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 = n^2 + \; 2n + 1 &\overset{(IV)}{>} (2n+1) + \; 2n + 1 \\ &\overset{(2n>1)}{>} 2n + 2 + 1 = 2(n+1) + 1\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

Umwandlung von $(0{,}15)_{10}$ in eine Festkommazahl:

$0{,}15 \cdot 2 = 0{,}3$	1. Ziffer ist 0
$0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6$	2. Ziffer ist 0
$0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2$	3. Ziffer ist 1
$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$	4. Ziffer ist 0
$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$	5. Ziffer ist 0
$0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$	6. Ziffer ist 1

Die Zahl setzt sich mit einer Periode der Länge 4 fort. Also ergibt sich:

$$(0{,}15)_{10} = (0{,}00\overline{1001})_2$$

.

Normalisierung:
Es gilt:

$$(0{,}15)_{10} = (0{,}00\overline{1001})_2 = (1{,}\overline{0011})_2 \cdot 2^{-3}.$$

Berechnung des Exponenten:
Der Exponent setzt sich aus dem "echten" Exponenten (hier: -3) und dem Offset (bei der 32-Bit IEEE 754 Darstellung: 127) zusammen. Es ergibt sich durch Teilen mit Rest:

$$(-3 + 127)_{10} = (124)_{10} = (01111100)_2$$

Vorzeichen-Bits:
Das Vorzeichen-Bit ist 0, da es sich um eine positive Zahl handelt.

Gleitkommazahl zusammensetzen:
Die 32-Bit IEEE 754 Gleitkommadarstellung von $(0{,}15)_{10}$ ist also:

$$(\underbrace{0}_{\text{Vorzeichen}}\ \underbrace{01111100}_{\text{Exponent}}\ \underbrace{0011\,0011\,0011\,0011\,0011\,010}_{\text{Mantisse}})_{\text{IEEE 754}}$$

Da das 24. Mantissenbit eine 1 wäre, wurde das 23. Mantissenbit aufgerundet.