Aufgabe 1

(a) **Umwandlung der Dezimalzahlen in duale Festkommazahlen:**
Umwandlung von $(15)_{10}$ in eine Festkommazahl:

$$\begin{array}{ll} 15 : 2 = 7 & \text{Rest } 1 \\ 7 : 2 = 3 & \text{Rest } 1 \\ 3 : 2 = 1 & \text{Rest } 1 \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1 \end{array}$$

also gilt $(15)_{10} = (1111)_2$.
Insgesamt ergibt sich für die Festkommadarstellung zur Basis 2: $(15)_{10} = (1111)_2$.

Umwandlung von $(6{,}5)_{10}$ in eine Festkommazahl:
Zuerst die Umwandlung von $(6)_{10}$ in eine Festkommazahl:

$$\begin{array}{ll} 6 : 2 = 3 & \text{Rest } 0 \\ 3 : 2 = 1 & \text{Rest } 1 \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1 \end{array}$$

also gilt $(6)_{10} = (110)_2$.

Nun folgt die Umwandlung von $(0{,}5)_{10}$ in eine Festkommazahl:

$$0{,}5 \cdot 2 = 1 \qquad \text{erste Ziffer ist 1, die 1 abziehen ergibt 0}$$

also gilt $(0{,}5)_{10} = (0{,}1)_2$.
Insgesamt ergibt sich für die Festkommadarstellung zur Basis 2: $(6{,}5)_{10} = (110{,}1)_2$.

Normalisierung:
Es ergibt sich:

$$(15)_{10} = (1111)_2 = (1{,}111)_2 \cdot 2^3$$

und ebenso

$$(6{,}5)_{10} = (110{,}1)_2 = (1{,}101)_2 \cdot 2^2.$$

Berechnung der Exponenten:
Die Exponenten setzen sich aus dem "echten" Exponenten (hier: 2 und 3) und dem Offset (bei der 32-Bit IEEE 754 Darstellung: 127) zusammen. Es ergeben sich durch Teilen mit Rest:

$$(3 + 127)_{10} = (130)_{10} = (10000010)_2$$
$$(2 + 127)_{10} = (129)_{10} = (10000001)_2$$

Vorzeichen-Bits:
Beide Vorzeichen-Bits sind 0, da es sich sowohl bei $(15)_{10}$ als auch bei $(6{,}5)_{10}$ um positive Zahlen handelt.

Gleitkommazahl zusammensetzen:
Insgesamt ergibt sich:
Die 32-Bit IEEE 754 Gleitkommadarstellung von $(15)_{10}$ ist:

$$(\underbrace{0}_{\text{Vorzeichen}}\ \underbrace{10000010}_{\text{Exponent}}\underbrace{11100000000000000000000}_{\text{Mantisse}})_{\text{IEEE 754}}$$

Die 32-Bit IEEE 754 Gleitkommadarstellung von $(6{,}5)_{10}$ ist:

$$(\underbrace{0}_{\text{Vorzeichen}}\ \underbrace{10000001}_{\text{Exponent}}\underbrace{10100000000000000000000}_{\text{Mantisse}})_{\text{IEEE 754}}$$

(b) **Angleichen der Exponenten:**
Der Exponent der Gleitkommadarstellung von $(6{,}5)_{10}$ ist um 1 kleiner als der Exponent der Gleitkommadarstellung von $(15)_{10}$, da $(10000010)_2 - (10000001)_2 = (1)_2 = (1)_{10}$. Die Mantisse zusammen mit der führenden 1 der Gleitkommadarstellung von $(6{,}5)_{10}$ wird um eine Stelle nach rechts verschoben, so dass sich 0,11010000000000000000000 ergibt. (Man beachte: Der Exponent des Ergebnisses ist zur Zeit $(10000010)_2$.)

Addition der Mantissen:
Die Mantisse des Ergebnisses errechnet sich durch

$$\begin{aligned}&(1{,}11100000000000000000000)_2 + (0{,}11010000000000000000000)_2\\&= (10{,}10110000000000000000000)_2.\end{aligned}$$

Normalisieren/Angleichen des Exponenten:
Das Ergebnis wird normalisiert, indem das Komma um eine Stelle nach links verschoben wird. Der Exponent des Ergebnisses muss deshalb von $(10000010)_2$ auf $(10000011)_2$ erhöht werden.
Die neu berechnete Mantisse ergibt sich somit zu 01011000000000000000000 wobei eine Null am Ende entfällt.

Zusammensetzen des Ergebnisses:
Die 32-Bit IEEE 754 Gleitkommadarstellung des Ergebnisses ist:

$$(\underbrace{0}_{\text{Vorzeichen}}\ \underbrace{10000011}_{\text{Exponent}}\underbrace{01011000000000000000000}_{\text{Mantisse}})_{\text{IEEE 754}}$$

(c) **Multiplikation der Mantissen mit führender 1:**
Es gilt

$$\begin{aligned}&(1{,}11100000000000000000000)_2 \cdot (1{,}10100000000000000000000)_2\\&= (11{,}0000110000000000000000000)_2.\end{aligned}$$

Das Ergebnis muss nun durch Verschieben des Kommas eine Stelle nach links normalisiert werden:

$$(11{,}0000110000000000000000000)_2 = (1{,}10000110000000000000000)_2 \cdot 2^1.$$

Addition der Exponenten:
Es muss mit den Exponenten ohne Offset gerechnet werden. Diese berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}(10000010)_2 - (127)_{10} = (130)_{10} - (127)_{10} = (3)_{10} = (00000011)_2\\(10000001)_2 - (127)_{10} = (129)_{10} - (127)_{10} = (2)_{10} = (00000010)_2\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Summe der Exponenten ohne Offset zu

$$(00000011)_2 + (00000010)_2 = (00000101)_2.$$

Nun wird der Offset wieder zu dem Exponenten addiert:

$$(00000101)_2 + (127)_{10} = (00000101)_2 + (01111111)_2 = (10000100)_2.$$

Da das Ergebnis normalisiert wurde, muss nun noch der Exponent um Eins von $(10000100)_2$ auf $(10000101)_2$ erhöht werden.

Setzen des Vorzeichens:
Da beide Vorzeichenbits der Faktoren 0 sind, hat auch das Ergebnis das Vorzeichenbit 0.

Zusammensetzen des Ergebnisses:
Die 32-Bit IEEE 754 Gleitkommadarstellung des Ergebnisses ist:

$$(\underbrace{0}_{\text{Vorzeichen}}\ \underbrace{10000101}_{\text{Exponent}}\underbrace{10000110000000000000000}_{\text{Mantisse}})_{\text{IEEE 754}}$$

Aufgabe 2

Behauptung. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $n^3 - n$ *ist teilbar durch 3.*

Beweis. Beweis durch vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang:
Sei $n = 1$.
Dann gilt: $n^3 - n = 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$
Die 0 wird von allen natürlichen Zahlen geteilt und damit auch von der 3.

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $n^3 - n$ ist teilbar durch 3.

Induktionsschluss:
Wir müssen zeigen: $(n+1)^3 - (n+1)$ ist teilbar durch 3.
Mit der Induktionsvoraussetzung $(*)$ folgt:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= (n+1)^2 \cdot (n+1) - (n+1) \\
&= (n^2 + 2n + 1) \cdot (n+1) - (n+1) \\
&= (n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1) - (n+1) \\
&= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) \\
&= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1 \\
&= (n^3 + 3 \cdot (n^2 + n) + 1) - n - 1 \\
&= 3 \cdot (n^2 + n) + n^3 + 1 - n - 1 \\
&= 3 \cdot (n^2 + n) + n^3 - n
\end{aligned}$$

$(n+1)^3 - (n+1)$ ist durch 3 teilbar, wie die obige Umformung zeigt. $3 \cdot (n^2 + n)$ ist aufgrund des Vorfaktors 3 durch 3 teilbar und mit der Induktionsvoraussetzung $(*)$ folgt, dass auch $n^3 - n$ durch teilbar ist. Damit ist die Summe der beiden Teilterme ebenfalls durch 3 teilbar. $\square$