Aufgabe 1

(a) Wir benutzen das Verfahren der wiederholten Division mit Rest:

$$
\begin{array}{ll}
79 : 2 = 39 & \text{Rest } 1 \\
39 : 2 = 19 & \text{Rest } 1 \\
19 : 2 = 9 & \text{Rest } 1 \\
9 : 2 = 4 & \text{Rest } 1 \\
4 : 2 = 2 & \text{Rest } 0 \\
2 : 2 = 1 & \text{Rest } 0 \\
1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1
\end{array}
$$

Also ergibt sich insgesamt: $(79)_{10} = (1001111)_2$.

(b) Wir benutzen die schriftliche Multiplikation:

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \cdot 1\,1\,0\,1 \\ \hline
1\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
1\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\
1_1 0_1 0_2 1_2 1_2 1_2 1_1 \\ \hline\hline
1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1
\end{array}
$$

(Die Übertrage werden hierbei in Dezimalschreibweise angegeben.)
Also ergibt sich als Ergebnis $(10000000011)_2$.

(c) Umrechnung von $(10000000011)_2$ in das Dezimalsystem:

$$
\begin{aligned}
(10000000011)_2 &= 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 \\
&\quad + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
&= 1024 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 \\
&= 1027
\end{aligned}
$$

Alternativ mit dem Hornerschema:

$$
\begin{aligned}
(10000000011)_2 &= (((((((((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \\
&\quad \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 \\
&= 1027
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis der Multiplikation ist also $(1027)_{10}$.

Aufgabe 2

Umwandeln von $(181)_{10}$ und $(93)_{10}$ in Dualzahlen:
Wir benutzen das Verfahren der wiederholten Division mit Rest:

$$\begin{array}{ll} 181 : 2 = 90 & \text{Rest } 1 \\ 90 : 2 = 45 & \text{Rest } 0 \\ 45 : 2 = 22 & \text{Rest } 1 \\ 22 : 2 = 11 & \text{Rest } 0 \\ 11 : 2 = 5 & \text{Rest } 1 \\ 5 : 2 = 2 & \text{Rest } 1 \\ 2 : 2 = 1 & \text{Rest } 0 \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1 \end{array}$$

Also ergibt sich: $(181)_{10} = (10110101)_2$.

$$\begin{array}{ll} 93 : 2 = 46 & \text{Rest } 1 \\ 46 : 2 = 23 & \text{Rest } 0 \\ 23 : 2 = 11 & \text{Rest } 1 \\ 11 : 2 = 5 & \text{Rest } 1 \\ 5 : 2 = 2 & \text{Rest } 1 \\ 2 : 2 = 1 & \text{Rest } 0 \\ 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1 \end{array}$$

Also ergibt sich: $(93)_{10} = (1011101)_2$.

Zahlen anpassen und Komplementbildung:
Die erste (längere) Zahl hat 8 Stellen, weshalb wir zur Darstellung im 2-Komplement mindestens 9 Bits benötigen. Daher ergänzen wir die Zahlen linksseitig mit Nullen auf 9 Bits. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} (181)_{10} &= (10110101)_2 = (010110101)_{2K} \\ (93)_{10} &= \;\;(1011101)_2 = (001011101)_{2K} \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir $(-93)_{10}$ im 2-Komplement durch Komplementbildung (Kippen der Bits und Addition einer 1).

$$\begin{array}{r} 0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0 \\ +\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ \hline\hline 1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1 \end{array}$$

Es ergibt sich $(-93)_{10} = (110100011)_{2K}$.

Addition im 2-Komplement:
Nun addieren wir $(181)_{10} = (010110101)_{2K}$ und $(-93)_{10} = (110100011)_{2K}$ um die Subtraktion durchzuführen.

$$\begin{array}{rr} & 0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ + & 1_1 1\,0_1 1\,0\,0_1 0_1 1_1 1 \\ \hline\hline & 1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \end{array}$$

Da wir im 2-Komplement mit 9 Bits rechnen, betrachten wir auch nur die 9 niederwertigsten Bit des Ergebnisses, d.h. wir erhalten $(010110101)_{2K}+(110100011)_{2K} = (001011000)_{2K}$.

Dezimaldarstellung des Ergebnisses:
Das Ergebnis $(001011000)_{2K}$ ist eine positive Zahl und wir können wie in Aufgabe 1 (c) die Dezimaldarstellung bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}(001011000)_2 &= 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 0 + 0 + 64 + 0 + 16 + 8 + 0 + 0 + 0 \\ &= 88\end{aligned}$$

Alternativ mit dem Hornerschema:

$$\begin{aligned}(001011000)_2 &= (((((((0 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 0 \\ &= 88\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir benutzen die schriftliche Division mittels einer Multiplikationstabelle:

i	$12 \cdot i$
1	12
2	24
3	36
4	50
5	62
6	74
7	106
10	120

$$\begin{array}{l} 6\,3\,7\,0 \;:\; 1\,2 = 5\,1\,4 \qquad \text{Rest} \quad 0 \\ \underline{6\,2} \\ \;\;1\,7 \\ \;\;\underline{1\,2} \\ \;\;\;\;5\,0 \\ \;\;\;\;\underline{5\,0} \\ \;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Die Division $(6370)_8 : (12)_8$ führt zu dem Ergebnis $(514)_8$ Rest $(0)_8$.

Aufgabe 4

Behauptung. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$

Beweis. Beweis durch vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang:
Sei $n = 1$.
Dann gilt: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{1} 2^i = 2^0 + 2^1 = 3 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 1 = 2^{n+1} - 1$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Induktionsschluss:
Wir müssen zeigen: $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{(n+1)+1} - 1$
Mit der Induktionsvorraussetzung $(*)$ folgt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \\
&\overset{(*)}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\
&= 2 \cdot (2^{n+1}) - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}
$$

$\square$