Digitale Systeme

Übungsklausur - Beispiellösung

# Aufgabe 1

(a) Benutzt man $n$ Bit für die Darstellung im 2-Komplement, so deckt man den Wertebereich von $-2^{n-1}$ bis $2^{n-1}-1$ ab.
Also ergibt sich der abgedeckte Zahlenbereich bei der Verwendung von 6 Bit im 2-Komplement zu: $-2^{6-1} = -32$ bis $2^{6-1} - 1 = 31$.

(b) Es ist die folgende Fließkommazahl

$$(\underbrace{1}_{\text{Vorzeichen}}\ \underbrace{10000011}_{\text{Exponent}}\ \underbrace{11010100000000000000000}_{\text{Mantisse}})_{\text{IEEE 754}}$$

gegeben.
Da für den Exponenten $0 < (\text{Exponent})_{10} < 255$ (denn $(10000011)_2 = (131)_{10}$) gilt, ergibt sich die dargestellte Dezimalzahl $w$ zu (kleine Nebenrechnungen sind dem Leser überlassen):

$$\begin{aligned}
w &= (-1)^{\text{Vorzeichen}} \cdot (1,\text{Mantisse})_2 \cdot 2^{\text{Exponent}-127} \\
&= (-1)^1 \cdot (1,11010100000000000000000)_2 \cdot 2^{(10000011)_2-127} \\
&= (-1) \cdot (1,110101)_2 \cdot 2^4 = (-1) \cdot (11101,01)_2 \\
&= (-1) \cdot (29,25)_{10} = (-29,25)_{10}
\end{aligned}$$

(c) Die dargestellte CMOS-Schaltung realisiert das NOR-Gatter, welches sich folgendermaßen als Funktion schreiben lässt: $\text{Out} = \overline{A+B}$.
Durch Anwendung der zweiten Regel von De Morgan (Satz 12) ergibt sich:

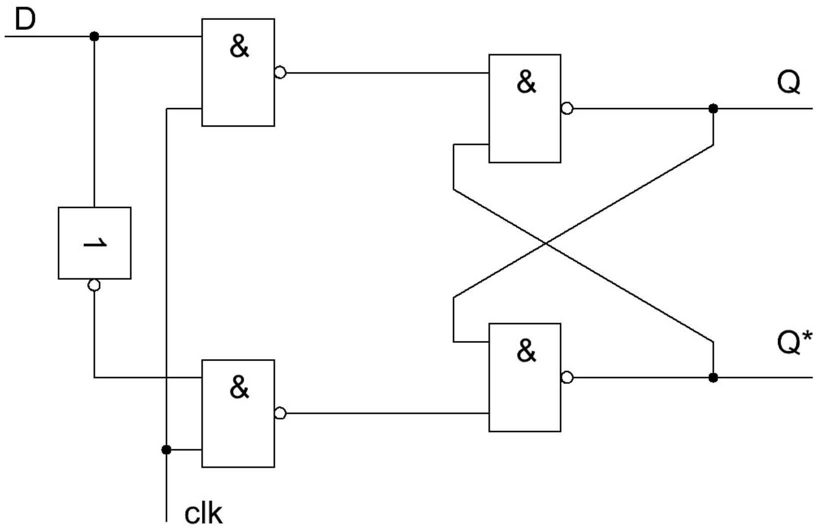
$$\text{Out} = \overline{A+B} \overset{S12}{=} \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

Offensichtlich wird diese Funktion durch den p-Block realisiert (beachte Invertierung der Eingangsignale und Realisierung der Und-Verknüpfung durch Reihenschaltung).
Weiter ergibt sich

$$\overline{\text{Out}} \overset{\text{s.o.}}{=} \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} \overset{S11}{=} A + B.$$

Da also offensichtlich die Funktion $\overline{\text{Out}}$ durch den n-Block realisiert wird, realisiert die gesamte CMOS-Schaltung die Funktion Out.

(d) Zeichnung eines levelgesteuerten D-Flipflops mit Hilfe von Boolschen Gattern:




(e) Die Wertetabelle eines 2-auf-1-Multiplexers mit dem Steuereingang $s$, den Eingängen $x$ (wird 0 zugeordnet) und $y$ (wird 1 zugeordnet) und dem Ausgang $z$ ist:

| $s$ | $y$ | $x$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# Aufgabe 2

(a) Da das MSB von $(01101111)_2$ gleich 0 ist, wird eine positive Zahl dargestellt. Diese lässt z.B. mit dem Hornerschema berechnen:

$$(01101111)_{2K} = (1101111)_2 = (111)_{10}.$$

**Achtung**: In der Klausur ist die Rechnung anzugeben.

(b) Um die Dezimalzahl $15,2$ im 32-bit IEEE Gleitkommaformat darzustellen werden folgende Schritte durchgeführt:

- **Umwandlung in eine Festkommazahl im Binärsystem**
  **Achtung**: In der Klausur ist die Rechnung anzugeben.
  Es ergibt sich: $(15,2)_{10} = (1111,\overline{0011})_2$.

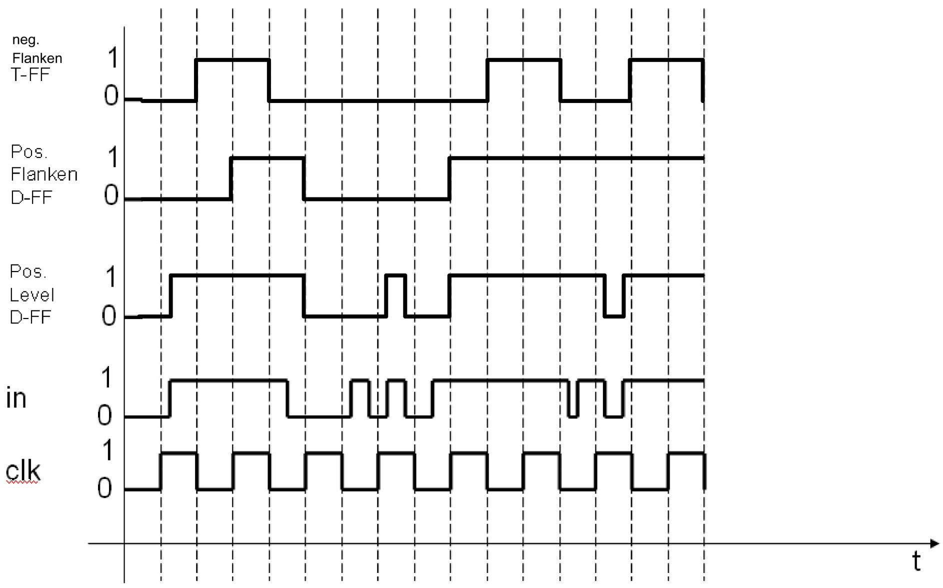
- **Normalisieren**
  Es ergibt sich $(1111,\overline{0011})_2 = (1,111\overline{0011})_2 \cdot 2^3$.
- **Vorzeichenbit**
  Da $15,2$ positiv ist muss das Vorzeichenbit 0 sein.
- **Exponent berechnen**
  Der Exponent wird als Summe des wirklichen Exponenten (hier: 3) und des Offsets (hier: 127) berechnet:
  $$(3)_{10} + (127)_{10} = (130)_{10} = (10000010)_2$$
- **Bestimmen der Mantisse**
  Es gilt $(1,111\overline{0011})_2 = (1,\underbrace{11100110011001100110011}_{\text{Mantisse}}\overline{0011})_2$, da die 24-te Nachkommstelle eine 0 ist (und somit die Mantisse nicht aufgerundet werden muss).
- **Zusammensetzen der Gleitkommazahl**
  Insgesamt ergibt sich:
  $$(15,2)_{10} = (\underbrace{0}_{\text{Vorzeichen}}\ \underbrace{10000010}_{\text{Exponent}}\underbrace{11100110011001100110011}_{\text{Mantisse}})_{\text{IEEE 754}}$$

(c) Es ergibt sich folgende Wertetabelle für die Funktionen $out1$ und $out2$:

| $in$ | $out1$ | $out2$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Also ist offensichtlich $out1$ die Invertierung und $out2$ die Identität.

(d) Vervollständigen des Impulsdiagramms liefert:



# Aufgabe 3

(a) **Bestimmen der KDNF von $f$:**
Aus der Wertetabelle ergibt sich folgende KDNF für $f$:

$$f = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d+a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}+a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot d+a\cdot b\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot b\cdot c\cdot d.$$

**Algorithmus von McCluskey:**
Der Algorithmus von McCluskey liefert durch wiederholte Anwendung der ersten und zweiten Vereinfachungsregel:

$$\begin{aligned}
f &= \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d+a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}+a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot d\\
&\quad +a\cdot b\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot b\cdot c\cdot d\\
&= \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{d}+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot d+\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c+\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot b\cdot\overline{c}+a\cdot b\cdot\overline{d}+a\cdot b\cdot d+a\cdot b\cdot c\\
&= \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot b+a\cdot b\\
&\overset{S3}{=} \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot c\cdot\overline{d}+a\cdot b
\end{aligned}$$

**Verfahren von Quine:**
Es wird eine Tabelle erstellt, die für jeden Minterm in der DNF eine Zeile und für jeden Primterm, der durch das Verfahren von McCluskey erzeugt worden ist, eine Spalte hat. In das Feld in der Zeile des Minterms $M$ und der Spalte des Primterms $P$ wird eine 1 eingetragen, wenn aus $P = 1$ folgt $M = 1$. Dann werden die dominanten Zeilen, also Zeilen, die nur eine 1 enthalten, gesucht und diese Einsen in den dominanten Zeilen werden rot markiert. Die Spalten, in denen rot markierte Einsen stehen, werden grau markiert. Es ensteht folgende Tabelle:

| | $\overline{a}\cdot\overline{b}$ | $\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}$ | $a\cdot c\cdot\overline{d}$ | $a\cdot b$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}$ | 1 | | | |
| $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d$ | 1 | | | |
| $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}$ | 1 | 1 | | |
| $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d$ | 1 | | | |
| $a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}$ | | 1 | 1 | |
| $a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\overline{d}$ | | | | 1 |
| $a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot d$ | | | | 1 |
| $a\cdot b\cdot c\cdot\overline{d}$ | | | 1 | 1 |
| $a\cdot b\cdot c\cdot d$ | | | | 1 |

Die dominanten Zeilen werden gestrichen und alle nicht dominanten Zeilen, die eine 1 enthalten, die auf einer markierten Spalte liegt, werden markiert und diese Zeilen werden ebenfalls gestrichen, so dass folgende Tabelle entsteht:

| | $\overline{a}\cdot\overline{b}$ | $\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}$ | $a\cdot c\cdot\overline{d}$ | $a\cdot b$ |
|---|---|---|---|---|
| $a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d}$ | | 1 | 1 | |

Weil in der Tabelle keine dominate Zeile mehr vorkommt, wählt man eine Spalte mit einer maximalen Anzahl von Einsen (hier ist die maximale Anzahl gleich 1) und markiert diese Spalte.

| | $\overline{a} \cdot \overline{b}$ | $\overline{b} \cdot c \cdot \overline{d}$ | $a \cdot c \cdot \overline{d}$ | $a \cdot b$ |
|---|---|---|---|---|
| $a \cdot \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d}$ | | 1 | 1 | |

Nun werden alle nicht dominanten Zeilen markiert, die eine 1 enthalten, die auf einer markierten Spalte liegt, und diese Zeilen werden ebenfalls gestrichen.
Nach dem Markieren und Streichen der Zeilen, bei denen eine Eins in einer markierten Spalte steht, ist keine Zeile mehr vorhanden. Also stellt die Oder-Verknüpfung der Primterme der markierten Spalten eine DMF der Funktion dar:

$$f = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot b.$$

Alternative Lösung: Wird im letzten Schritt nicht die zweite sondern die dritte Spalte gewählt, entsteht folgende DMF von $f$:

$$f = \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot b.$$

(b) **Bestimmen einer KMF von $f$ mit Hilfe von KV-Diagrammen:**
Das KV-Diagramm zu $f$ ergibt sich durch Ablesen der Einträge des Diagramms aus der Wertetabelle:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & \overline{a} & a & a & \overline{a} & \\
\hline
\overline{b} & 1 & 0 & 0 & 1 & d \\
\hline
b & 0 & 1 & 1 & 0 & d \\
\hline
b & 0 & 1 & 1 & 0 & \overline{d} \\
\hline
\overline{b} & 1 & 1 & 0 & 1 & \overline{d} \\
\hline
 & c & c & \overline{c} & \overline{c} &
\end{array}$$

Bestimmen einer KMF durch Zusammenfassen der maximalen Blöcke mit 0:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & \overline{a} & a & a & \overline{a} & \\
\hline
\overline{b} & 1 & \color{green}{0} & \color{green}{0} & 1 & d \\
\hline
b & \color{magenta}{0} & 1 & 1 & \color{magenta}{0} & d \\
\hline
b & \color{magenta}{0} & 1 & 1 & \color{magenta}{0} & \overline{d} \\
\hline
\overline{b} & 1 & 1 & 0 & 1 & \overline{d} \\
\hline
 & c & c & \overline{c} & \overline{c} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & \overline{a} & a & a & \overline{a} & \\
\hline
\overline{b} & 1 & 0 & \color{blue}{0} & 1 & d \\
\hline
b & 0 & 1 & 1 & 0 & d \\
\hline
b & 0 & 1 & 1 & 0 & \overline{d} \\
\hline
\overline{b} & 1 & 1 & \color{blue}{0} & 1 & \overline{d} \\
\hline
 & c & c & \overline{c} & \overline{c} &
\end{array}$$

Daraus ergibt sich folgende KMF für $f$:

$$f = \color{magenta}{(a + \overline{b})} \cdot \color{green}{(\overline{a} + b + \overline{d})} \cdot \color{blue}{(\overline{a} + b + c)}.$$

**Benötigte Bemerkungen und Nebenrechnungen:**
Es gilt mit den bestimmten DMF und KMF:

- $f = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot b \overset{A3}{=} \overline{b} \cdot (\overline{a} + c \cdot \overline{d}) + a \cdot b$ (für den p-Block werden bei Realisierung dieser Funktion 6 Transistoren benötigt).

- $f = \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot b \overset{A3}{=} \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot (c \cdot \overline{d} + b)$ (für den p-Block werden bei Realisierung dieser Funktion 6 Transistoren benötigt).

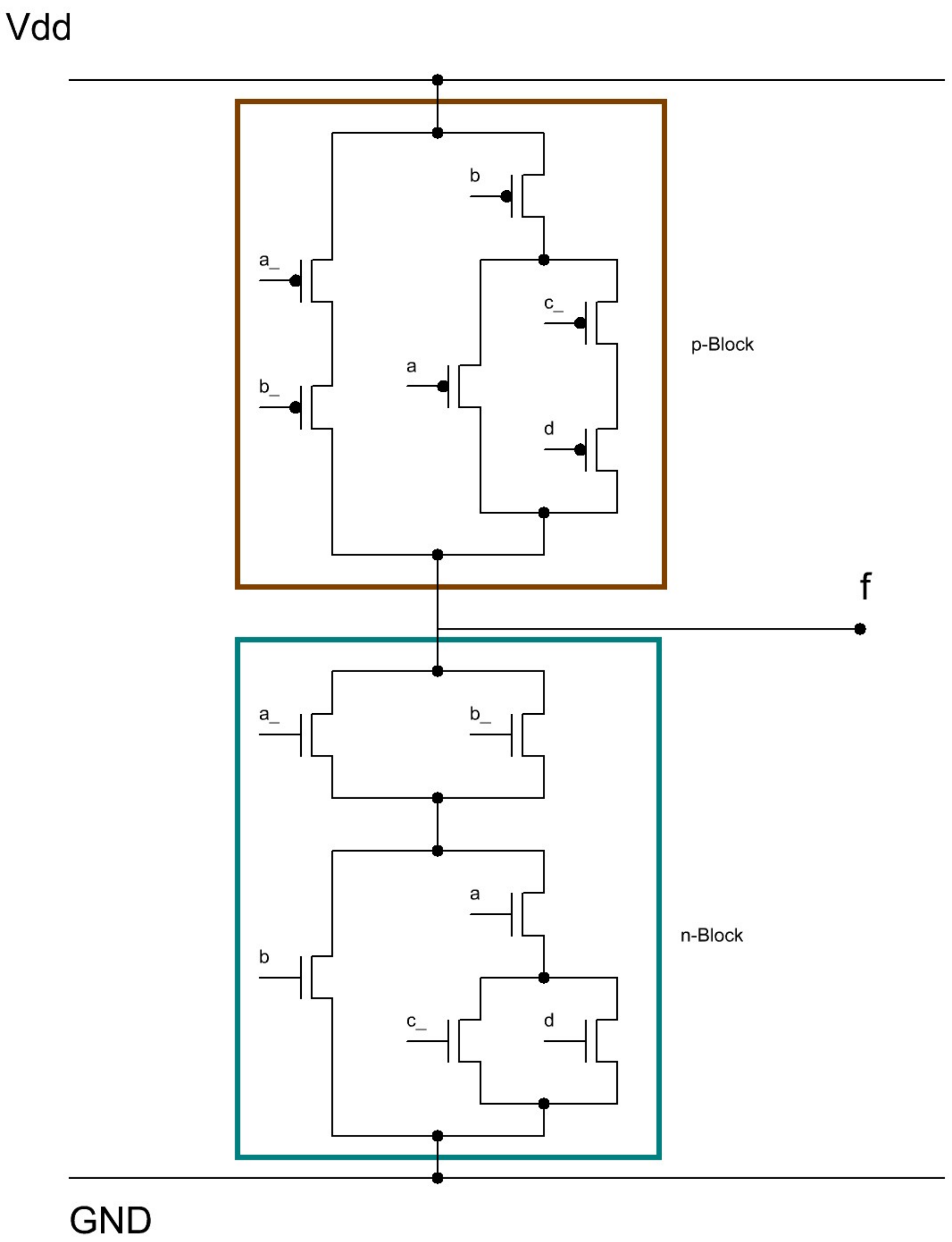
- $f = (a + \overline{b}) \cdot (\overline{a} + b + \overline{d}) \cdot (\overline{a} + b + c) \overset{A3}{=} (a + \overline{b}) \cdot ((\overline{a} + b) + (c \cdot \overline{d}))$ (für den p-Block werden bei Realisierung dieser Funktion 6 Transistoren benötigt).

- $\overline{f} = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot b} \overset{S12}{=} \overline{(\overline{a} \cdot \overline{b})} \cdot \overline{(\overline{b} \cdot c \cdot \overline{d})} \cdot \overline{(a \cdot b)} \overset{S11}{=} (a + b) \cdot (b + \overline{c} + d) \cdot (\overline{a} + \overline{b}) \overset{A3}{=} (b + a \cdot (\overline{c} + d)) \cdot (\overline{a} + \overline{b})$ (für den n-Block werden bei Realisierung dieser Funktion 6 Transistoren benötigt).

- Analog folgt $\overline{f} = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot b} = (a + b) \cdot (\overline{a} + \overline{c} + d) \cdot (\overline{a} + \overline{b}) \overset{A3}{=} (a + b) \cdot (\overline{a} + ((\overline{c} + d) \cdot \overline{b}))$ (für den n-Block werden bei Realisierung dieser Funktion 6 Transistoren benötigt).

- Ebenso folgt $\overline{f} = \overline{(a + \overline{b}) \cdot (\overline{a} + b + \overline{d}) \cdot (\overline{a} + b + c)} = (\overline{a} \cdot b) + (a \cdot \overline{b} \cdot d) + (a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}) \overset{A3}{=} (\overline{a} \cdot b) + (a \cdot \overline{b}) \cdot (\overline{c} + d)$ (für den n-Block werden bei Realisierung dieser Funktion 6 Transistoren benötigt).

Somit ist die minimale Anzahl benötigter Transistoren im p-Block 6 und im n-Block ebenfalls 6, also insgesamt 12.
Diese Anzahl der Transistoren kann mit allen möglichen Kombinationen der oben beschrieben Vereinfachungen von f erreicht werden.
Hier eine Realsierung die im p-Block $f = \overline{b} \cdot (\overline{a} + c \cdot \overline{d}) + a \cdot b$ und im n-Block $\overline{f} = (b + a \cdot (\overline{c} + d)) \cdot (\overline{a} + \overline{b})$ verwendet:



Vdd
b
a_
c_
p-Block
a
b_
d
f
a_
b_
a
n-Block
b
c_
d
GND